# Limites monovariables

Antoine Bergerault

Ce document a pour but de vous entraîner à utiliser des astuces courantes de calcul pour les limites monovariables.

Il a été pensé pour des étudiants suivant le cours d'analyse I (non avancée). En revanche, certaines questions sont d'un niveau au dessus de ce qu'il peut vous être demandé à l'examen. Prenez ce document comme un entraînement, et non pas comme un savoir faire.

Les exercices ont étés compilés à partir de plusieurs sources (le *Douchet* et internet notamment), certains ayant aussi étés inventés.

Rappelons également que l'analyse ne se limite pas aux limites, les questions de calculs explicites ne forment qu'une partie de l'examen.

Merci à tous ceux qui ont pris la peine de relire ce document et donner leur avis dessus. Et pour tous ceux s'apprêtant à s'y essayer : bon courage et amusez-vous bien !

## Trois parties



Vous pouvez faire vos retours sur ce document à l'adresse suivante : https://forms.gle/S7BQuW88fmkAGLqT6.
Il peut être utile pour arriver à se situer parmi les autres étudiants ou pour découvrir les questions les plus recommandées.

Dernière édition le 23/12/2021

# Exercices

Certaines limites solvables très facilement avec la règle de Bernouilli-L'Hospital ou les développements limités peuvent être résolues autrement. Il pourrait être formateur de trouver d'autres astuces vous amenant au même résultat.

Vous pouvez cocher les cases pour suivre votre progression

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$ ☐

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^x-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}}$ ☐

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^5\ln\left(\frac{x^5+1}{x^5}\right)$ ☐

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3-10}-\sqrt{(n+3)(n+2)(n-5)}$ ☐

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln\cosh x}$ ☐

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-\tan x)\sin\pi x}{(1-\cos x)(1-\cosh x)}$ ☐

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\sin x}$ ☐

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{1+x}}-xe^{\frac{1}{x}}\right)$ ☐

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1)-\ln\sqrt{x}}$ ☐

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x\sin x}{\ln(1+x^2)}$ ☐

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^4(x)\ln(1+x\cos(x))+\frac{x(x-2)}{2}}{x\sinh\left(\arctan^2(x)\right)}$ ☐

12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^8 x}{(1-\cos x)^4}$ ☐

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{5^n}$ ☐

14. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n e^{-3n}$ ☐

15. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1)$ ☐

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\arctan x$ ☐

17. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})}-1)$ ☐

18. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x+\sqrt[3]{1-x^3})$ ☐

19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x\sin 5x}$ ☐

20. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\tan(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ ☐

21. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 6x-\cos 8x}{x^2}$ ☐

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^3 x\sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}$ ☐

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)}\right)$ ☐

24. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - \frac{1}{\ln(x+1)}$ ☐

25. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{\sin x-\tan x}$ ☐

26. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1-\cos 7(x-\pi)}{5(x-\pi)^2}$ ☐

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ ☐

28. $\lim\limits_{x\to 1} (\ln x^6 + 1)^{\frac{1}{\ln x^3}}$ ☐

29. $\lim\limits_{x\to \infty} (\log_x(1+x))^x$ ☐

30. $\lim\limits_{n\to \infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} n^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^n}$ ☐

# Astuces

1. Limite connue : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

   Conséquence très utile : on peut remplacer dans certains cas une expression de la forme $\sin A$ par $A$ lorsque $A$ tend vers $0$.

2. Limite connue : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

3. Passer par l'exponentiel.

   Nous pouvons utiliser la relation $a = e^{\log(a)}$ afin de simplifier grandement la résolution de notre limite en utilisant par la suite les propriétés du logarithme.

4. Utilisation de la quantité conjuguée

   Lorsque des racines apparaissent dans notre limite, la quantité conjuguée permet souvent de la simplifier.

5. Utiliser la valeur absolue de notre fonction et montrer que celle-ci tend vers 0

6. Théorème des gendarmes

7. Comparaisons avec limites connues

8. Critères de d'Alembert et Cauchy

9. Règle de Bernouilli-L'Hospital

10. Développements limités

11. Caractérisation de la limite d'une fonction par les suites

**Développements limités usuels**

1. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ \dots$

2. $\log(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$

3. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ \dots$

4. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ \dots$

5. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ \dots$

6. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ \dots$

7. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ \dots$

8. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ \dots$

9. $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ \dots$

10.
$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-(k-1))}{k!} x^k = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ \dots$

Pour aider à les retenir :

(4) se retrouve assez rapidement avec une division polynomiale

(5) et (6) ont la même structure

(7) est comme la (5) mais avec uniquement des "+"

(8) est comme la (6) mais avec uniquement des "+"

(9) est comme la (5) mais sans les factorielles "!"

Un petit peu d’intuition sur les formules de Taylor :

L’idée est de trouver un polynôme qui approxime le mieux notre fonction autour d’un point donné. Pour cela, nous allons faire en sorte que les premières dérivées soient égales.

Notons $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ les fonctions polynomiales telles que
$f_i^{(i)}(a) = g^{(i)}(a),\ f_i^{(j \neq i)}(a) = 0$

Nous obtenons :

$f_0(x) = g(a)$

$f_1(x) = g'(a)(x-a)$

$f_2(x) = \frac{g''(a)}{2}(x-a)^2$

$f_3(x) = \frac{g^{(3)}(a)}{3 \times 2}(x-a)^3$

Et plus généralement, $f_i(x) = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

Ainsi, notre approximation polynomiale d’ordre $n$ de la fonction $g$ autour de $a$ est :

$\sum\limits_{k=0}^{n} f_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

C’est l’idée derrière les polynômes de Taylor, qui ajoutent la notion de fonction d’“erreur” (souvent notée $\epsilon$) pour pouvoir utiliser l’égalité.

La série de Maclaurin de la fonction exponentielle se retrouve alors très facilement, sachant que $\exp^{(i)}(0) = \exp(0) = 1\ \forall i \in \mathbb{N}$

# Corrigé

Ce corrigé contient des propositions de résolutions, mais il se peut que les méthodes que vous avez utilisé ne sont pas toutes les mêmes que celles décrites ici.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$

Nous simplifions dans un premier temps avec la quantité conjuguée

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$

Puis nous simplifions et finissons le calcul

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

2. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^x-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}}$

La règle de Bernouilli-L'Hospital est bien utile pour cette limite

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^x-\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{x-\sqrt{2}} = \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(\ln(x)+1)\cdot x^x}{1} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}\cdot(\ln\sqrt{2}+1) = 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\cdot(\frac{1}{2}\ln 2+1) = 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}\cdot(\ln 2+2)$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^5\ln\left(\frac{x^5+1}{x^5}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x^5\ln\left(\frac{x^5+1}{x^5}\right) = \lim_{x\to\infty} x^5\ln\left((1+\frac{1}{x^5})^{\frac{x^5}{x^5}}\right) = \ln(e) = 1$$

Autre méthode :

Nous pouvons simplifier grandement cette limite après une petite manipulation astucieuse et un changement de variable

$$\lim_{x\to\infty} x^5\ln\left(\frac{x^5+1}{x^5}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}{\frac{1}{x^5}} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$$

Cette nouvelle limite, bien que connue, peut se calculer à l'aide d'un développement limité (ou de la règle de Bernouilli-L'Hospital)

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{y} = 1$$

Nous pouvons même la retrouver de manière élégante grâce à la dérivée du logarithme

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y) - \ln(1)}{y} = \ln'(1) = 1$$

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{n^3 - 10} - \sqrt{(n+3)(n+2)(n-5)}$

Comme avec beaucoup de limites mettant en jeu des racines, nous allons pouvoir grandement avancer à l'aide de la quantité conjuguée

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} \sqrt{n^3 - 10} - \sqrt{(n+3)(n+2)(n-5)} &= \lim_{n \to \infty} \sqrt{n^3 - 10} - \sqrt{n^3 - 19n - 30} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{n^3 - 10 - n^3 + 19n + 30}{\sqrt{n^3 - 10} + \sqrt{n^3 - 19n - 30}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{19n + 20}{n^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{10}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{19}{n^2} - \frac{30}{n^3}}\right)} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{19 + \frac{20}{n}}{\sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{10}{n^3}} + \sqrt{1 - \frac{19}{n^2} - \frac{30}{n^3}}\right)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \cosh x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{\ln \cosh x} &= \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(e^x + e^{-x})} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\ln\left(\frac{1}{2}\right) + x + \ln(1 + e^{-2x})} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{\ln\left(1+e^{-2x}\right) - \ln(2)}{x}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-\tan x)\sin \pi x}{(1-\cos x)(1-\cosh x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-\tan x)\sin \pi x}{(1-\cos x)(1-\cosh x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\tan x)(1+\cos x)\sin \pi x}{(1-\cos^2 x)(1-\cosh x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\pi x(x-\tan x)(1+\cos x)}{(1-(1-\sin^2 x))(1-\cosh x)} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\pi x(x-\tan x)}{x^2(1-\cosh x)} \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{x^2}{\sin x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\pi(x-\tan x)}{x(1-\cosh x)}$$

On peut ici utiliser la règle de Bernouilli-L'Hospital trois fois

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\pi(x-\tan x)}{x(1-\cosh x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{2\pi \tan^2 x}{(1-\cosh x)-x\sinh x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\pi \tan x(\tan^2 x+1)}{2\sinh x+x\cosh x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\pi[(\tan^2 x+1)^2+2\tan^2 x(\tan^2 x+1)]}{3\cosh x+x\sinh x}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x-\tan x)\sin \pi x}{(1-\cos x)(1-\cosh x)} = \frac{4\pi}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(\frac{1-x+2x}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x}$$

Cela nous permet de mettre en évidence deux limites connues

$$\lim_{x\to 0} \ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1-x}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)}{\frac{2x}{1-x}}}_{\to 1}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1}\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{1-x} = 2$$

Encore une fois, cette limite est encore plus facile avec des développements limités connus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-(-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{1+x}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{1+x}} - xe^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{y\to 0} \left(\left(\frac{1}{y}+1\right)e^{\frac{y}{y+1}} - \frac{1}{y}e^{y}\right)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{\frac{y}{y+1}}-e^{y}}{y} + e^{\frac{y}{y+1}}$$

$$= \lim_{y\to 0} 1 + \frac{e^{\frac{y}{y+1}}-1+1-e^y}{y}$$

$$= 1 + \lim_{y\to 0} \frac{e^{\frac{y}{y+1}}-1}{y} + \underbrace{\frac{1-e^y}{y}}_{\to -1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{\frac{y}{y+1}}-1}{\frac{y}{y+1}} \cdot \frac{1}{y+1}$$

$$= 1$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln\sqrt{x}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{y}}{\ln\left(1-\frac{1}{y}\right)} = \lim_{z\to 0} -\frac{\sin 2z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} -\frac{2\sin z\cos z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} -2\frac{\sin z}{\ln(1+z)}$$

Isolons la limite $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\sin z}{\ln(1+z)}$

Celle-ci est trivialement calculable avec les développements limités, mais nous pouvons également la résoudre en faisant apparaître deux limites connues (l'idée reste néanmoins la même)

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin z}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{z}{\ln(1+z)}}_{\to 1} = 1$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{2}{\sqrt{x}}}{\ln(\sqrt{x}-1) - \ln\sqrt{x}} = -2$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x \sin x}{\ln(1+x^2)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x \sin x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}}_{\to 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$$

Passons par un développement limité d'ordre 1

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^4(x)\ln(1+x\cos(x)) + \frac{x(x-2)}{2}}{x\sinh\left(\arctan^2(x)\right)}$

Nous procédons à un développement limité d'ordre 3

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \epsilon(x^3)$

$x\cos(x) = x - \frac{x^3}{2} + \epsilon(x^3)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \epsilon(x^3)$

$\ln(1 + x\cos(x)) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \epsilon(x^3)$

$\cos^4(x) = 1 - 2x^2 + \epsilon(x^3)$

$\cos^4(x)\ln(1 + x\cos(x)) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{13x^3}{6} + \epsilon(x^3)$

$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \epsilon(x^3)$

$\arctan^2(x) = x^2 + \epsilon(x^3)$

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \epsilon(x^3)$

$\sinh\left(\arctan^2(x)\right) = x^2 + \epsilon(x^3)$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^4(x)\ln(1+x\cos(x)) + \frac{x(x-2)}{2}}{x\sinh\left(\arctan^2(x)\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} - \frac{13x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x}{x^3} = -\frac{13}{6}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^8 x}{(1-\cos x)^4}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^8 x}{(1-\cos x)^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)^4 \sin^8 x}{(1-\cos^2 x)^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2^4 \sin^8 x}{\sin^8 x} = 16$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{5^n}$

Nous pouvons tout d'abord essayer d'utiliser le critère de d'Alembert (astuce 8.)

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\ln(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{\ln n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{5} \cdot \frac{\ln n! + \ln(n+1)}{\ln n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)}\right) = p$

Montrons $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)} < 1$ :

Pour cela, montrons un résultat intermédiaire : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n!} < 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n!} < \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante, nous avons alors : $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n!)} < 1$

Ainsi nous avons $p < \frac{1}{5} \cdot (1+1) = \frac{2}{5} < 1$

Donc, par le critère d'Alembert, nous avons $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{5^n} = 0$

14. $\lim_{n\to\infty} 3^n e^{-3n}$

Ici on reprend l'astuce 8. avec le critère de Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} |3^n e^{-3n}|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{e^3} < \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} < 1$$

Ainsi, nous en déduisons $\lim_{n\to\infty} 3^n e^{-3n} = 0$

15. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1)$

Une manière élégante de faire pourrait être de passer par la limite connue : $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

Résolution sympathique mais illégale sans d'autres explications :

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) = \lim_{n\to\infty} n((1+\frac{1}{n})^{\frac{n}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{n}) = 1$$

Pourquoi illégale ? Car en faisant de même pour d'autres limites on peux trouver des résultats contradictoires :

$$\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 \times n = \lim_{n\to\infty} (\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}) \times n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \times n = 1$$

En allant plus dans les détails :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e} - 1) &= \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{\lim_{a\to\infty} (1+\frac{1}{a})^a} - 1) \\ &= \lim_{n\to\infty} n(\lim_{a\to\infty} (1+\frac{1}{a})^{\frac{a}{n}} - 1)\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{a\to\infty} n((1+\tfrac{1}{a})^{\frac{a}{n}} - 1)$$

On ne peut pas simplifier davantage, du moins avec les connaissances d'analyse I.

Il est toujours possible de passer par la règle de Bernouilli-L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{e}-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \arctan x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} \arctan x = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{2+\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}})}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \tfrac{\pi}{2}(\sqrt{2+\tfrac{1}{x}} - \sqrt{1+\tfrac{1}{x}})$$

$$= \lim_{x\to\infty} \tfrac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$$

17. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})} - 1)$

Encore une fois, nous pouvons utiliser la quantité conjuguée

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt{(1+\tfrac{2}{x})(1+\tfrac{3}{x})} - 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{x[(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})-1]}{\sqrt{(1+\frac{2}{x})(1+\frac{3}{x})}+1}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(1+2y)(1+3y)-1}{y(\sqrt{(1+2y)(1+3y)}+1)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{5y+6y^2}{y(\sqrt{1+5y+6y^2}+1)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{5+6y}{\sqrt{1+5y+6y^2}+1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

18. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(x+\sqrt[3]{1-x^3})$

$$\lim_{x\to\infty} x^2(x+\sqrt[3]{1-x^3}) = \lim_{x\to\infty} x^2(x+x\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}) = \lim_{x\to\infty} x^3(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}) = \lim_{y\to 0^+} \frac{1+\sqrt[3]{y-1}}{y}$$

Par Bernouilli-L'Hospital nous trouvons :

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1+\sqrt[3]{y-1}}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(y-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}$$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x\sin 5x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x\cos^2 x\sin 5x} = \lim_{x\to 0} x\underbrace{(\frac{\sin x}{x})^2}_{\to 1}\underbrace{\frac{5x}{\sin 5x}}_{\to 1}\frac{1}{5x}\underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{\to 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}$$

20. $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\tan(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\tan(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x} = \lim_{y\to 0} \frac{y\tan y}{1-\sin(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2})} = \lim_{y\to 0} \frac{y\sin y}{\cos y(1-\cos\frac{\pi}{2}y)} = \lim_{y\to 0} \frac{y\sin y}{\cos y(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2}y})}$$

On peut ensuite appliquer la quantité conjuguée

$$\lim_{y\to 0} \frac{y\sin y}{\cos y(1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2}y})} = \lim_{y\to 0} \frac{y\sin y(1+\cos\frac{\pi}{2}y)}{\cos y\sin^2\frac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{(\frac{\pi}{2}y)^2}\frac{\sin y}{y}(\frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y})^2\frac{2y}{\cos y} = \lim_{y\to 0} \frac{2}{(\frac{\pi}{2})^2\cos y} = \frac{8}{\pi^2}$$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 6x-\cos 8x}{x^2}$

Dans un premier temps, déterminons une formule pour $\cos(a)-\cos(b)$ que nous pourrons réutiliser par la suite

$$\begin{aligned}\cos(a)-\cos(b) &= \cos\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{a-b}{2}\right)-\cos\left(\tfrac{a+b}{2}+\tfrac{b-a}{2}\right)\\ &= \cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)-\sin\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)\\ &\quad -\cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\tfrac{b-a}{2}\right)+\sin\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\end{aligned}$$

---

Rappel:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \implies \sin\left(\tfrac{b-a}{2}\right) = -\sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \implies \cos\left(\tfrac{b-a}{2}\right) = \cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$

$$= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 6x - \cos 8x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin\left(\frac{6x+8x}{2}\right)\sin\left(\frac{6x-8x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(7x)\sin(x)}{x^2}$$

On utilise ensuite une limite connue (ce qui revient à la même chose qu'un développement limité)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(7x)\sin(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 14\underbrace{\frac{\sin(7x)}{7x}}_{\to 1}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} = 14$$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^3 x \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\tan^3 x \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x}\right| < \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x(1-\cos x)}\right| = \lim_{x\to 0} \left|\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}\right| = \lim_{x\to 0} |\sin x(1+\cos x)| = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan^3 x \sin\frac{1}{x}}{1-\cos x} = 0$

23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\left(\frac{3x}{2}\right)^{\tan(3x)}\right) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan\left(\frac{y}{2}\right)^{\tan(y)}\right) \qquad (L)$$

Déterminons désormais un petit résultat intermédiaire qui nous servira par la suite :

Pour tout $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \implies \cos(a) = \sqrt{\cos(2a) + \sin^2(a)}$$

$$\ln(L) = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y}{\cos y}\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin y \ln\left(\left(\frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos(y)+\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{\cos y}}\right)$$

$$= \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\ln\left(\left(1+\frac{1}{\frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos(y)}}\right)^{\frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{\cos(y)}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}}\right)$$

$$= \lim_{y \to \frac{\pi}{2}} \; -\frac{1}{2\sin^2(\frac{y}{2})}$$

$$= -1$$

$$\implies L = \frac{1}{e}$$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \; \frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - \frac{1}{\ln(x+1)}$

$$\lim_{x \to 0} \; \frac{1}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \lim_{x \to 0} \; \frac{\ln(x+1)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ln(x+1)}$$

Ici, on peut calculer les développements limités d’ordre 2

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \epsilon^2(x)$$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(1+(x+\sqrt{x^2+1}-1)\right)$$

$$= \ln(1+X(x))$$

$$= X(x) - \frac{X(x)^2}{2} + \epsilon^2(X(x))$$

---

$$X'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$X''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$X(x) = X'(0)x + \frac{X''(0)}{2}x^2 + \epsilon^2(x)$$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \epsilon^2(x)$$

$$X^2(x) = x^2 + \epsilon^2(x)$$

---

$$= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \epsilon^2(x)$$

$$= x + \epsilon^2(x)$$

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ln(x+1) = (x - \frac{x^2}{2} + \epsilon^2(x)) \cdot (x + \epsilon^2(x)) = x^2 + \epsilon^2(x)$$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\ln(x+1)-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\ \frac{x-\frac{x^2}{2}-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\ \frac{\sin^3 x}{\sin x-\tan x}$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\sin^3 x}{\sin x-\tan x} = \lim_{x\to 0}\ \frac{\sin^2 x}{1-\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\ \frac{1-\cos^2 x}{\frac{\cos x-1}{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\ -\cos x(\cos x+1) = -2$$

26. $\lim\limits_{x\to \pi}\ \frac{1-\cos 7(x-\pi)}{5(x-\pi)^2}$

Cette limite est très rapide à calculer avec la règle de Bernouilli-L'Hospital

$$\lim_{x\to \pi}\ \frac{1-\cos 7(x-\pi)}{5(x-\pi)^2} = \lim_{y\to 0}\ \frac{1-\cos 7y}{5y^2} = \lim_{y\to 0}\ \frac{7\sin 7y}{10y} = \lim_{y\to 0}\ \frac{49}{10}\underbrace{\frac{\sin 7y}{7y}}_{\to 1} = \frac{49}{10}$$

Autre méthode (avec les limites connues) :

$$\lim_{x\to \pi}\ \frac{1-\cos 7(x-\pi)}{5(x-\pi)^2} = \lim_{y\to 0}\ \frac{1-\cos 7y}{5y^2}$$

$$= \lim_{y\to 0}\ \frac{1}{5y^2}(1-\sqrt{1-\sin^2(7y)})$$

$$= \lim_{y\to 0}\ \frac{1-1+\sin^2 7y}{5y^2(1+\sqrt{1-\sin^2(7y)})}$$

$$= \lim_{y\to 0}\ \frac{49}{5(1+\sqrt{1-\sin^2(7y)})}(\frac{\sin(7y)}{7y})^2$$

$$= \frac{49}{10}$$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\ \frac{1-\cos(x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{1-\cos(x)\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \frac{1-\cos^2 x\cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0}\ \frac{1-(1-\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\ \frac{1-(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \ \frac{1}{2x^2} - (1-\sin^2 x)(\frac{1}{2x^2} - 1)$$

$$= \lim_{x\to 0} \ 1 + \frac{\sin^2 x}{2x^2} - \sin^2 x$$

$$= \frac{3}{2}$$

28. $\lim\limits_{x\to 1} \ (\ln x^6 + 1)^{\frac{1}{\ln x^3}}$

En passant par l'exponentiel

$$\lim_{x\to 1} \ (\ln x^6 + 1)^{\frac{1}{\ln x^3}} = \lim_{x\to 1} \ e^{\frac{1}{\ln x^3}\ln\left(\ln x^6 + 1\right)} = \lim_{y\to 1} \ e^{\frac{\ln\left(\ln y^2 + 1\right)}{\ln y}} = \lim_{z\to 0} \ e^{\frac{\ln(2z+1)}{z}} = \lim_{z\to 0} \ e^{2\cdot\frac{\ln(2z+1)}{2z}}$$

En utilisant la limite connue $\lim\limits_{x\to 0} \ \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, nous trouvons

$$\lim_{z\to 0} \ e^{2\cdot\frac{\ln(2z+1)}{2z}} = e^2$$

La limite connue peut se démontrer comme dans le corrigé du 3.

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \ (\log_x(1+x))^x$

$$\lim_{x\to\infty} \ (\log_x(1+x))^x = \lim_{x\to\infty} \ (\frac{\ln\left(x(1+\frac{1}{x})\right)}{\ln(x)})^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ (1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)})^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ (1 + \frac{1}{\frac{\ln(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}})^{\frac{\ln(x)}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\cdot x\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \ e^{\frac{\overbrace{\ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)}^{\to 1}}{\ln(x)}}$$

$$= 1$$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} n^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} n^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \sum\limits_{k=0}^{n-1} n^k}{n^n \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^n}$$

Nous pouvons trouver une simplification pour la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} n^k$ qui est une série génératrice (*generating function* en anglais) assez classique. En multipliant par $(n-1)$ nous pouvons former une suite télescopique qui va nous permettre d'obtenir un résultat avec lequel il va être simple de travailler

$$(n-1)\sum_{k=0}^{n-1} n^k = \sum_{k=0}^{n-1}(n^{k+1} - n^k) = \sum_{k=1}^{n} n^k - \sum_{k=0}^{n-1} n^k = n^n - 1$$

Ainsi nous obtenons $\sum\limits_{k=0}^{n-1} n^k = \frac{n^n-1}{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \sum\limits_{k=0}^{n-1} n^k}{n^n \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \frac{n^n-1}{n-1}}{n^n \sum\limits_{k=0}^{n-1} (\frac{n-k}{n})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} \frac{n^n-1}{n^n} \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1}-1}{(e^{-1})^n-1} = 1 - \frac{1}{e}$$